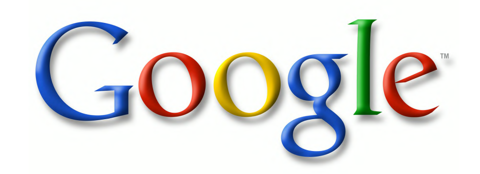
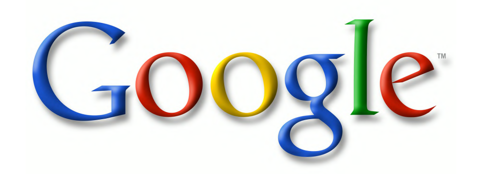




Über die Asymmetrie der Ablenkungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Schwingungen bei einem magnetischen Horizontalintensitätsvariometer.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

vorgelegt von

Robert v. Förster
aus Münster in Westfalen.



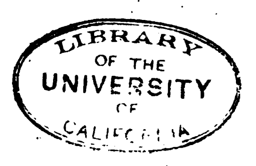
Marburg.
R. Friedrich's Universitäts-Buchdruckerei, Inhaber Karl Gleiser.
1905.



Von der Philosophischen Fakultät als Dissertation angenomme
am 30. Juli 1904.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

Referent: Professor Dr. Fr. Richarz.



Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Definition der Asymmetrie der Ablenkungen — Theorie von Fr. Richarz vom Zusammenhange der Asymmetrie der Ablenkungen und Schwingungen — Bestätigung im Falle der magnetischen Wage.

Vor einigen Jahren ist von Fr. Richarz[1]) auf eine Anzahl von Fällen asymmetrischer Schwingungen unter Angabe ihrer Ursachen hingewiesen worden.

Zwei von diesen Fällen: nämlich die beim magnetischen Horizontalintensitätsvariometer und die bei der magnetischen Wage vorkommende Asymmetrie hat P. Schulze[2]) in seiner Dissertation behandelt.

Fr. Richarz[3]) begründete den allgemeinen Zusammenhang der Asymmetrie der Ablenkungen und Schwingungen und fand ihn im Falle der magnetischen Wage bestätigt.

Wir sprechen von einer Asymmetrie der Ablenkungen in dem Falle, wo ein dem betreffenden System mitgeteiltes

1) Fr. Richarz und P. Schulze, Arch. Néerl. des Sc. ex. et nat. Boscha-Festschrift, 1901; Ann. d. Phys., IV. 8. 1902. p. 348.

2) P. Schulze, Inaug. Diss. Greifswald 1901.

Von weiteren Arbeiten sind zu erwähnen:

F. A. Schulze, Ann. d. Phys., IV. 9. 1902. p. 1111 ff.

J. Horn, Zeitschrift f. Math. u. Phys., 47. 1902. 3. u. 4. Heft; 49. 1903. 2. Heft.

3) Fr. Richarz und P. Schulze, ib. p. 361 ff.

Drehungsmoment verschieden grosse Ablenkungen aus seiner Gleichgewichtslage hervorruft, je nachdem wir es nach links oder rechts einwirken lassen.

Nach dieser Erörterung gehen wir dazu über, den Inhalt der Theorie vom Zusammenhange beider Asymmetrieen kurz anzugeben.

Bezeichnet β die durch ein kleines, zu den ursprünglichen hinzugefügtes Drehungsmoment Δ bewirkte Ablenkung und $f(\beta)$ die algebraische Summe der übrigen Drehungs momente, diese aber in dem entgegengesetzten, nach der Gleichgewichtslage hingerichteten Sinne positiv gerechnet, so gilt allgemein für die abgelenkte Lage die Gleichung:

$$\text{I)} \ldots . \Delta = f(\beta).$$

Fr. Richarz entwickelt diese Funktion in eine mit ihrem dritten Gliede abgebrochene Mac Laurinsche Reihe und findet unter der Berücksichtigung, dass für $\Delta = 0$ auch $\beta = 0$ ist, für β den Wert:

$$\text{II)} \ldots . \beta = \frac{\Delta}{f'(0)} - \frac{\Delta^2 f''(0)}{2 f'^3(0)},$$

welchen er abgekürzt schreibt:

$$\beta = m\Delta + n\Delta^2.$$

Hieraus erkennt man als Bedingung für das Vorhandensein einer Asymmetrie der Ablenkungen:

$$\frac{f''(0)}{f'(0)} \lesseqgtr 0, \text{ also } f''(0) \lesseqgtr 0.$$

Nunmehr entwickelt Fr. Richarz die Differentialgleichung:

$$\text{III)} \ldots . K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -f(\alpha),$$

wo f die gleiche Funktion wie oben sei, in ähnlicher Weise unter der Annahme kleiner Amplituden. Indem er $\alpha = \vartheta$ als Umkehrpunkt festsetzt, findet er durch Integration:

$$K\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = f'(0)(\vartheta^2 - \alpha^2) + f''(0)\frac{\vartheta^3 - \alpha^3}{3}$$

und durch Nullsetzung dieser Gleichung für den entsprechenden Umkehrpunkt, welcher für $f''(0) = 0$, d. h. wenn keine Asymmetrie der Ablenkungen vorliegt, $\alpha = -\vartheta$ sein müsste:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\vartheta - \frac{1}{3}\frac{f''(0)}{f'(0)}\vartheta^2,\\ &= -\vartheta + \varepsilon.\end{aligned}$$

Man erkennt, dass auch allgemein eine Asymmetrie der Schwingungen vorliegt, wenn eine solche der Ablenkungen vorhanden ist.

Dies gilt aber auch erfahrungsgemäss.

Das Mass der Asymmetrie der Schwingungen, ε, ist dann durch die Gleichung:

$$\text{IV)} \ldots\ldots \varepsilon = -\frac{1}{3}\frac{f''(0)}{f'(0)}\vartheta^2 = \frac{2}{3}\left[\frac{n}{m^2}\right]\vartheta^2$$

gegeben.

Diese Gleichung drückt den Zusammenhang der Asymmetrie der Ablenkungen und Schwingungen aus. Bezüglich der letzteren gilt somit der Satz:

„Die Asymmetrie der kleinen Schwingungen ist allgemein dem Quadrate der Amplitude proportional". —

Die im vorigen auseinandergesetzte Theorie vom Zusammenhange beider Asymmetrieen, der Ablenkungen und der Schwingungen, gilt also zunächst für kleine Amplituden.

Indessen hat Fr. Richarz[1]) hinreichend Fingerzeige gegeben, wie die Theorie für grössere Amplituden abgeändert werden müsste. —

Es ist eingangs bemerkt worden, dass Fr. Richarz seine Theorie im Falle der magnetischen Wage bestätigt gefunden hat.

---

1) Fr. Richarz u. P. Schulze, ib. p. 364.

In diesem Falle ist

$$\Delta = l\delta,$$

also ist

$$\beta = ml\delta + nl^2\delta^2 = \mu\delta + \nu\delta^2,$$

folglich ist

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\left[\frac{\nu}{\mu^2}\right]\vartheta^2.$$

Aus den Versuchen P. Schulzes erhielt er:

ϑ	$\varepsilon = \lvert\vartheta\rvert - \lvert\alpha\rvert$	$\varepsilon = \frac{2}{3}\left[\frac{\nu}{\mu^2}\right]\vartheta^2$
0,04771	0,0031	0,0043
0,03859	0,0021	0,0028
0,02856	0,0012	0,0016
0,02047	0,00060	0,00079
0,01480	0,00040	0,00041

Man sieht ohne weiteres, dass die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung um so genauer ist, je kleiner die Amplitude wird. —

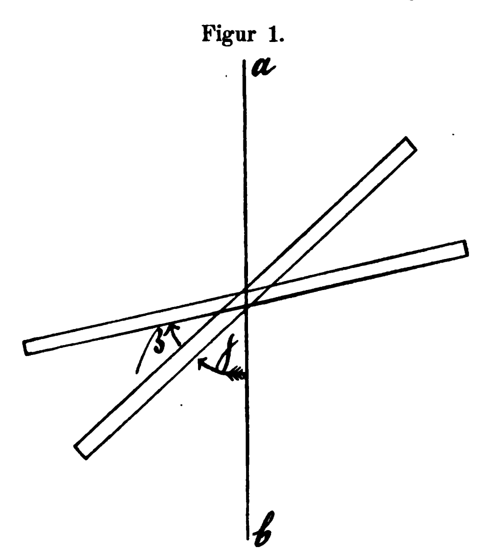
Der Zweck der vorliegenden Arbeit war nun, diesen Zusammenhang beider Asymmetrieen an dem magnetischen Horizontalintensitätsvariometer zu prüfen.

A. Theoretische Erörterungen im Falle des Horizontalintensitätsvariometers.

I. Herleitung einer Gleichung für das Mass E der Asymmetrie der Ablenkungen.

Man denke sich den Magnet in einer abgelenkten Lage, in welcher er mit dem Meridian den Winkel γ bilden möge und in welche er durch eine Drehung des Torsions-

Figur 1.



ab = Richtung des magnetischen Meridians.

kopfes um den Winkel ω gelangt sei. Ist der Magnet im Ruhezustande, so ist die Summe der beiden von dem Erd-

magnetismus bez. von der Torsion herrührenden Drehungsmomente gleich Null, d. h. es ist:

$$1) \ldots\ldots D_1 \sin\gamma = D_2 \; (\omega - \gamma),$$

wo D_1 die vom Erdmagnetismus auf den Magnetstab ausgeübte Direktionskraft und D_2 die Direktionskraft der Torsion, das Torsionsmoment oder den Torsionskoëffizienten bezeichnet.

Dreht man den Torsionskopf in der eingeschlagenen Richtung um den Winkel δ weiter, so nimmt der Magnet eine neue Ruhelage ein, in welcher er mit der vorigen (siehe Fig. 1) den Winkel β bilden möge und für welche die Gleichung gilt:

$$2) \ldots\ldots D_1 \sin(\gamma + \beta) = D_2 \; [\omega + \delta - (\gamma + \beta)].$$

Da δ als klein vorausgesetzt wurde, infolgedessen auch β als klein zu denken ist, so können in der Entwicklung der Funktion Glieder von höherer als der zweiten Potenz von β unbeachtet gelassen werden. Dann erhält man:

$$D_1\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \sin\gamma + D_1 \beta \cos\gamma = D_2 \; (\omega - \gamma + \delta - \beta)$$

oder unter Anwenduug der Gleichung (1):

$$3) \ldots\ldots \frac{D_1}{2} \sin\gamma \, \beta^2 - (D_1 \cos\gamma + D_2)\, \beta + D_2 \, \delta = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch D_2, so lautet sie abgekürzt:

$$p\,\beta^2 - q\,\beta + \delta = 0,$$

wo p und q Funktionen von γ sind:

$$p = \frac{D_1}{2D_2} \sin\gamma, \quad q = \frac{D_1 \cos\gamma + D_2}{D_2}.$$

Also ist:

$$4) \ldots\ldots \beta = \frac{q}{2p} \pm \frac{q}{2p} \sqrt{1 - \frac{4p\delta}{q^2}}.$$

Falls $D_1 < D_2$ ist, ist die Funktion

$$\frac{4p}{q^2} = 2\, D_1 \, D_2 \, \frac{\sin\gamma}{(D_1 \cos\gamma + D_2)^2}$$

im Intervalle $0 \ldots . \pi$ stetig und endlich, die äusseren Grenzen ausgeschlossen von Null verschieden und positiv.

Ist $D_1 = D_2$, so wird die Funktion ∞ bei $\gamma = \pi$. Ist $D_1 > D_2$, so wird sie im Intervalle $\pi/2 \ldots . \pi$ an einer Stelle ∞, bleibt aber positiv und wird Null bei $\gamma = \pi$.

Indem man nun δ klein wählt, wie oben, wird erreicht, dass, falls $D_1 > D_2$ ist, im Intervalle $0 \ldots . \pi/2$, falls $D_1 \overline{\overline{<}} D_2$ ist, im Intervalle $0 \ldots . \gamma < \pi$ der Ausdruck

$$\frac{4\,p\delta}{q^2} = 4 \left|\frac{p\delta}{q^2}\right| < 1$$

wird. Dann kann die Quadratwurzel nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt und die entstehende Reihe mit ihrem dritten Gliede abgebrochen werden:

$$4\text{a}) \ldots . \beta = \frac{q}{2\,p} \pm \frac{q}{2\,p}\left(1 - \frac{2\,p\delta}{q^2} - \frac{2\,p^2\delta^2}{q^4}\right).$$

Erwägt man, dass für $\delta = 0$ auch $\beta = 0$ sein muss, so ergiebt sich die Benutzung des negativen Vorzeichens des zweiten Summanden; also ist:

$$\beta = \frac{\delta}{q} + \frac{p\delta^2}{q^3}$$

und man erhält nach Einsetzung der Ausdrücke für p und q:

$$5) \ldots . \beta = \frac{D_2\,\delta}{D_1 \cos\gamma + D_2} + \frac{1}{2}\,\frac{D_1 \sin\gamma\,(D_2\,\delta)^2}{(D_1 \cos\gamma + D_2)^3}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass je nachdem δ positiv oder negativ ist, β verschiedene absolute Werte erhält, dass also Drehungen, welche von einer vom Meridian verschiedenen Gleichgewichtslage aus um einen gleich grossen Winkel nach entgegengesetzten Seiten vorgenommen werden, eine Asymmetrie der Ablenkungen bewirken.

Substituiert man in die Gleichung (5) für D_1 den aus der Fundamentalgleichung sich ergebenden Wert $D_2\,(\omega - \gamma) : \sin\gamma$, so erhält man:

$$5a) \ldots . \beta = \frac{\delta}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1} + \frac{1}{2} \frac{(\omega - \gamma) \delta^2}{[(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1]^3}.$$

Diese Gleichung stellt für die verschiedenen Werte von δ und die berechneten von β eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Parabel mit verticaler Achse dar.

Dann ist die algebraische Summe je zweier zu gleichen aber entgegengesetzten Abscissen gehörigen Ordinaten:

$$6) \ldots . \; ^{1)} E = \frac{(\omega - \gamma) \delta^2}{[(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1]^3}$$

das Mass für die Asymmetrie der Ablenkungen.

II. Herleitung der Ausdrücke für den Quotienten $\nu : \mu^2$. (Siehe Einleitung.)

Die Gleichung (5a) lautet abgekürzt:

$$5b) \ldots . \beta = \mu\delta + \nu\delta^2,$$

wo

$$7) \ldots . \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1} \\ \nu = \dfrac{1}{2} \dfrac{\omega - \gamma}{[(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1]^3} \end{cases}$$

und

ist.

Durch Vergleich dieser Ausdrücke erkennt man, dass

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\omega - \gamma}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1} \mu^2$$

ist, folglich ist

$$8) \ldots . \frac{\nu}{\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega - \gamma}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1}.$$

$\frac{\nu}{\mu^2} \gtrless 0$ ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer Asymmetrie der Ablenkungen.

---

1) Auch diese Gleichung stellt für die verschiedenen Werte von δ und die berechneten von E eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Parabel mit verticaler Achse dar.

Diese Bedingung muss aber nach der in der Einleitung dargestellten Theorie von Fr. Richarz übereinstimmen mit der anderen, welche für das Vorhandensein einer Asymmetrie der Schwingungen erfüllt sein muss.

Dass dies hier der Fall ist, erkennt man aus der von P. Schulze experimentell bestätigten Gleichung für das Mass der Asymmetrie der Schwingungen:

$$9) \ldots \ldots \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{\omega - \gamma}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1} \vartheta^2$$

wo ω, γ und ϑ die bekannten Grössen sind. Es ist also:

$$10) \ldots \ldots \frac{\nu}{\mu^2} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{\vartheta^2} = \frac{n}{m^2}.$$

Folglich lautet die allgemeine Gleichung (IV) auch im vorliegenden Falle:

$$11) \ldots \ldots \varepsilon = \frac{2}{3} \left[\frac{\nu}{\mu^2} \right] \vartheta^2.$$

Damit diese Gleichung (11) den Zusammenhang beider Asymmetrieen zum Ausdruck bringt, müssen, wie sich aus der Herleitung ergiebt, μ und ν aus den direkt beobachteten Werten von β und δ in der Gleichung (5b), so wie es auf Seite 25 u. 31 oder wie es s. Z. von P. Schulze geschehen ist — nicht aber aus dem beobachteten Werte von ω bez. γ in der Gleichung (8) — berechnet werden, δ als klein vorausgesetzt, während ϑ aus den asymmetrischen Schwingungen zu ermitteln ist, ebenfalls als klein vorausgesetzt. So erhält man einen Wert für ε. Diesen vergleicht man mit dem aus der Gleichung

$$\varepsilon = |\vartheta| - |\alpha|$$

für die Asymmetrie der Schwingungen ermittelten Werte.

III. Über die Abhängigkeit der Asymmetrie der Ablenkungen vom Drillungswinkel.

Ein Vergleich der Gleichungen (5) und (5a) liefert ohne weiteres, wenn D_1 mit a, D_2 mit b bezeichnet und γ durch

x ersetzt wird, für das Mass der Asymmetrie der Ablenkungen (6) den Ausdruck:

$$6a) \ldots . \; E = y = a\,(b\delta)^2 \frac{\sin x}{(b + a\cos x)^3}.$$

Nimmt man nun δ als unveränderliche Grösse an, so stellt die Gleichung (6a) für die einzelnen Fälle $a \gtreqqless b$ ebene Kurven dar, deren Verlauf uns über das Verhalten der Asymmetrie der Ablenkungen Aufschluss giebt, wenn das hinzugefügte kleine Drehungsmoment $(D_2\delta)$ konstant ist.

Indess wird von einer Diskussion dieser Gleichung abgesehen. An ihrer Stelle ist im folgenden die Diskussion der Gleichung (8):

$$\frac{\nu}{\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega - \gamma}{(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{a}{2} \frac{\sin x}{b + a\cos x}$$

gegeben,[1]) welche für die genannten Fälle ganz ähnlich verlaufende Kurven liefert, d. h. Kurven, welche mit jenen in den gleichen Intervallen gleiche ausgezeichnete Punkte und Wendepunkte, gleiche Unstetigkeitsstellen besitzen und sich lediglich durch ihre Ordinaten von jenen unterscheiden.

Der vorliegende Abschnitt wird also in zwei Teile zerfallen, in einen jene Diskussion enthaltenden und in einen ihre physikalische Bedeutung behandelnden Teil.

a) Diskussion der Gleichung

$$y = \frac{a}{2} \frac{\sin x}{b + a\cos x}.$$

1) Es sei $a < b$.

---

1) Die erste Veranlassung zur Untersuchung dieser Gleichung gab die Frage, ob der Wert von $\nu:\mu^2$ nicht auch in der Weise ermittelt werden könnte, dass man bez. für ω und γ — siehe B, IIIa und IVa — der Reihe nach die Werte von ω_1 und γ_1, ω_2 und γ_2, ω_3 und γ_3 in die Gleichung (8) einsetzt und aus den so erhaltenen Werten von $\nu:\mu^2$ das Mittel bildet.

Dann ist die Funktion im Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ endlich, eindeutig und stetig samt ihren abgeleiteten und positiv. Da sie an den Endpunkten dieses Intervalles gleiche Werte (Null) besitzt, so hat sie in ihm wenigstens ein Maximum.

Auch in dem Intervalle $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ ist die Funktion endlich, eindeutig und stetig samt ihren abgeleiteten, aber sie ist negativ. Da sie an den Endpunkten dieses Intervalles gleiche Werte (Null) hat, so liegt wenigstens ein Minimum der Funktion vor.

Bildet man nun den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2} \frac{a + b \cos x}{(b + a \cos x)^2},$$

so folgt aus der Gleichung: $\frac{a}{2} \frac{a + b \cos x}{(b + a \cos x)^2} = 0$

$$\cos x = -\frac{a}{b}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte der cos-Kurve und der im Abstande $a:b$ die Achse der negativen y schneidenden zur Achse der x parallelen Linie. Sonach gehört die kleinste Wurzel dem Intervalle $\pi/2 < x < \pi$, die nächst grössere dem Intervalle $\pi < x < 3\pi/2$ an; jene ist um ebensoviel grösser als $\pi/2$ wie diese kleiner als $3\pi/2$ ist. Die (paarweise) folgenden Wurzeln gehören dem Intervalle $5\pi/2 < x < 3\pi$ und $3\pi < x < 7\pi/2$ an ...

Es erhellt, dass die Kurve für $\pi/2 < x < \pi$ nur einen ausgezeichneten Punkt, nämlich einen Culminationspunkt hat, und dass sie für $\pi < x < 3\pi/2$ nur einen ausgezeichneten Punkt und zwar einen tiefsten hat ...

Die Ordinate dieses höchsten und tiefsten Punktes ist

bez. $y = \pm \frac{a}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$.

Zwecks Untersuchung von Wendepunkten sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden.

α) Es sei $b > 2a$.

Bildet man den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{2} \frac{(2a^2 - b^2 + ab \cos x)}{(b + a \cos x)^3} \sin x,$$

so erkennt man, dass im Koordinatenursprung ein Wendepunkt vorliegt. Denn aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ folgt zunächst:

$$\sin x = 0,$$
$$\text{also } x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$$

und da aus der Form des zweiten Differentialquotienten ersichtlich ist, dass der dritte für $x = 0,\ \pi,\ 2\pi\ \ldots$ von Null verschieden ist, so bedeuten jene Punkte Wendepunkte der Kurve.

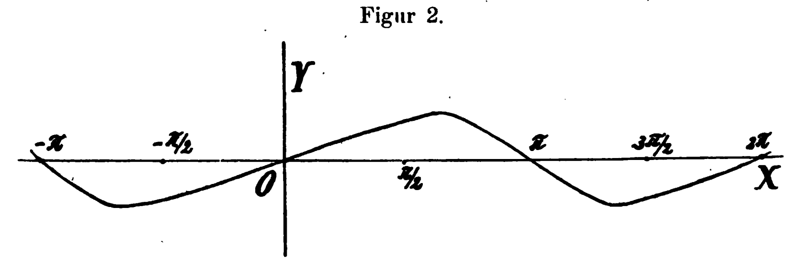
Aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ folgt ferner

$$\cos x = \frac{b^2 - 2a^2}{ab}.$$

Da aber diese Differenz $\frac{b}{a} - \frac{2a}{b} > 1$ ist, so wird jene Gleichung durch keinen Wert von x erfüllt; folglich hat die Kurve keine anderen Wendepunkte als die angegebenen.

Dies Resultat erhält man auch, falls $b = 2a$ ist (Fig. 2).

Figur 2.



Die Ordinaten sind verdoppelt.

β) Es sei $b < 2a$.

Dann lassen sich die Fälle $b > a\sqrt{2}$ und $b < a\sqrt{2}$ unterscheiden.

$(\alpha\,\alpha)$ Im Falle: $b > a\sqrt{2}$,

ist
$$1 < \frac{2a}{b} < \sqrt{2} < \frac{b}{a} < 2,$$

also ist
$$\cos x = \frac{b^2 - 2a^2}{ab} < 1.$$

Für diesen Fall kann also die Kurve ausser den schon gefundenen Wendepunkten $x = 0, \pi, 2\pi \ldots$ noch weitere besitzen.

Ihre Existenz lässt sich folgendermassen nachweisen.

Es sei x sehr klein, so dass man

$\sin = x$ und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ setzen darf, dann ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{2} \frac{(2a - b)\,(a + b) - \frac{1}{2}abx^2}{(b + a\,\cos x)^3}\quad x > 0,$$

während für $x = \pi|2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{2} \frac{2a^2 - b^2}{b^3} < 0$$

ist. Demnach ist die Kurve in der Nähe des Nullpunktes für ein positives x nach unten konvex, für $x = \pi/2$, wenn nicht schon für ein kleineres x nach unten konkav, so dass sie für einen zwischen 0 und $\pi/2$ liegenden Abscissenwert einen Wendepunkt haben muss.

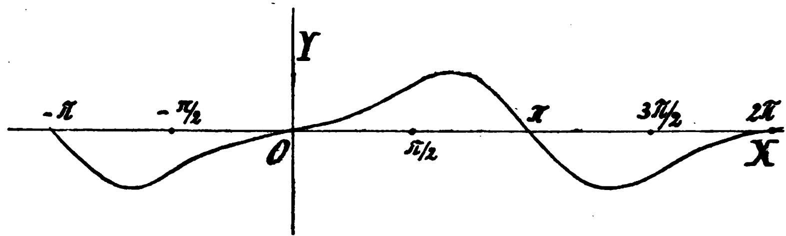
Die Gerade $y = \frac{b^2 - 2a^2}{ab}$ schneidet die cos-Kurve zum zweiten Male im Intervalle $3\pi/2 < x < 2\pi$ und man kann analog zeigen, dass die Kurve auch für $3\pi/2 < x < 2\pi$ einen Wendepunkt besitzt (Fig. 3).

Die Ordinate dieser Wendepunkte ist

$$\text{bez. } y = \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{b^2 - a^2}}.$$



Figur 3.



Die Ordinaten sind verdoppelt.

($\beta\beta$). Im Falle $b < a\sqrt{2}$

ist

$$2a^2 - b^2 < a^2,$$

also ist *a* fortiori

$$2a^2 - b^2 < ab.$$

Demnach schneidet die Gerade $y = -\frac{2a^2 - b^2}{ab}$ die cos-Kurve für $\pi/2 < x < 3\pi/2$ in zwei Punkten und zwar in zwei Punkten, deren Abstand von der Achse der x kleiner ist als der Abstand der Schnittpunkte der cos-Kurve mit der Geraden $y = -\frac{a}{b}$ von der gleichen Achse.

Mithin kann in diesem Falle die Kurve noch einen Wendepunkt zwischen dem Punkte $(\pi/2, a/2b)$ und ihrem Culminationspunkte, einen weiteren zwischen ihrem tiefsten Punkte und dem Punkte $(3\pi/2, -a/2b)$ besitzen.

Es ist aber für $x = \pi/2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{2}\frac{2a^2 - b^2}{b^3} > 0,$$

also ist die Kurve in dem Punkte $(\pi/2, a/2b)$ nach unten konvex und da die Umgebung des Culminationspunktes eine Konkavität nach unten bedeutet, so hat die Kurve tatsächlich einen Wendepunkt zwischen den oben bezeichneten Punkten. Analog wird gezeigt, dass sie einen weiteren Wendepunkt zwischem ihrem tiefsten Punkte und dem Punkte $(3\pi/2, -a/2b$ hat (Fig. 4).

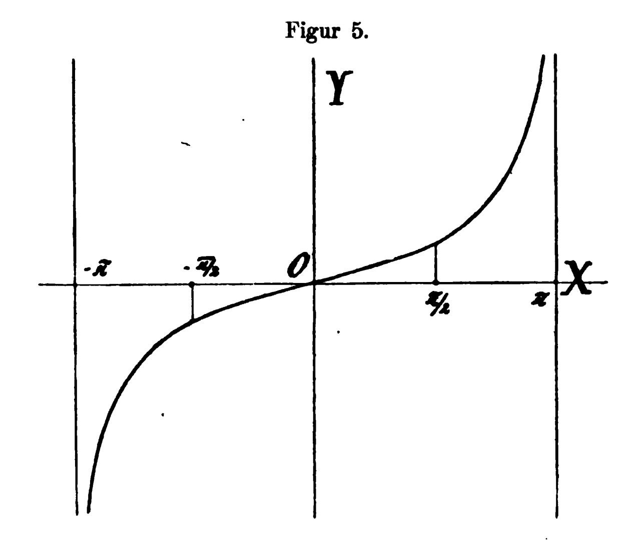
Figur 4.

2) Es sei $a = b$.

Dann lautet die Gleichung der Kurve:

$$y = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{ (Fig. 5).}$$

Figur 5.

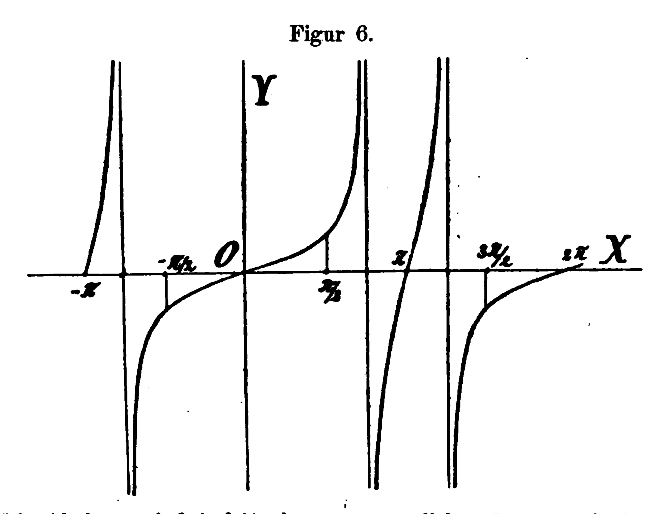


3) Es sei $a > b$

In dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi/2$ ist die Funktion endlich, eindeutig und stetig samt ihren abgeleiteten und positiv.

In dem Intervalle $\pi/2 \leqq x \leqq \pi$ wird sie samt ihren abgeleiteten unstetig durch Unendlichwerden, zugleich von der betreffenden Stelle

Figur 6.



Die Abcissen sind auf $^2/_3$ ihrer ursprünglichen Länge reduziert.

ab negativ, geht für $x = \pi$ wachsend durch die Null und wird für $\pi \leqq x \leqq 3\pi/2$ wiederum unstetig durch Unendlichwerden, von da ab negativ und passiert wachsend bei $x = 2\pi$ die Null. Die Funktion hat weder Maxima noch Minima, aber die Kurve hat bei $y = 0$, $x = 0$, π, 2π . . . Wendepunkte. (Fig. 6).

b) Anwendung auf die Asymmetrie der Ablenkungen.

Eine Betrachtung der im vorigen Abschnitte ermittelten Kurven[1]) führt zu folgenden Resultaten.

Ist das zu den ursprünglichen hinzugefügte kleine Drehungsmoment konstant, so nimmt die Asymmetrie der Ablenkungen mit wachsendem Drillungswinkel im ersten Quadranten zu.

Unter der gleichen Voraussetzung nimmt die Asymmetrie im folgenden Quadranten, wenn die vom Erdmagnetismus auf

1) Es sei hier erwähnt, dass durch jene Kurven auch die Untersuchungen von P. Schulze über das Verhalten der Asymmetrie der Schwingungen bei konstanter Amplitude illustriert werden; die Stellen, wo jene Kurven ins Unendliche verlaufen, bezeichnen die von ihm angegebenen Lagen labilen Gleichgewichts.

den Magnetstab ausgeübte Direktionskraft (a) kleiner als das Torsionsmoment (b) ist, zunächst noch zu, dann aber beständig ab und geht an der Stelle $\gamma = \pi$ in die Symmetrie über.

Das ist dann der Fall, wenn der Torsionskopf mit dem Magneten ungefähr starr oder durch einen kurzen, dicken Draht verbunden ist.[1])

Ist die magnetische Direktionskraft eben so gross wie das Torsionsmoment, d. h. ist das „Torsionsverhältnis" (siehe Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, 10. Auflage 1905, p. 366) gleich 1, so nimmt die Asymmetrie im zweiten Quadranten ebenfalls zu und zwar sehr rasch; sie wird um so rascher wachsen, je mehr sich die grössere Ablenkung der äussersten Lage stabilen Gleichgewichtes $\pi - \gamma \simeq 0$ nähert.

Ist die Direktionskraft grösser als das Torsionsmoment und das ist bei dünnen langen Drähten, mit welchen bei den vorliegenden Untersuchungen operiert wurde, der Fall, so würde sich, wenn die Ablenkungen über $\gamma = \pi/2$ hinaus untersucht werden können, zeigen, dass ihre Asymmetrie rasch zunimmt und zwar um so rascher, je mehr sich die grössere Ablenkung der äussersten Lage stabilen Gleichgewichtes nähert. —

1) P. Schulze, ib. p. 21—22.

B. Ausführung der Versuche.

I. Nähere Bestimmung der Aufgaben.

Die erste Aufgabe der experimentellen Untersuchungen bildete die Ermittelung aller der in dem Ausdrucke $\nu : \mu^2$ enthaltenen Grössen ω und γ auf dem durch die Theorie vorgeschriebenen Wege.

Bezeichnet man die den Drehungen des Torsionskopfes

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

entsprechenden Gleichgewichtslagen des Magnetstabes mit

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3,$$

so hatte man zu zeigen, ob

$$\gamma_3 - \gamma_2 > \gamma_2 - \gamma_1,$$

wenn

$$\omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1$$

war, d. h. ob eine messbare Asymmetrie der Ablenkungen eintrat, wenn diese Ablenkungen in der verlangten Weise vorgenommen wurden.

Alsdann war eine Reihe von Schwingungsbeobachtungen auszuführen und zwar von Schwingungen, welche um die mittelste der Gleichgewichtslagen stattfanden.

Nunmehr hatte man ε einerseits aus der Formel (11) zu berechnen und andrerseits aus der Gleichung

$$\varepsilon = |\vartheta| - |\alpha|$$

zu ermitteln.

In der vorliegenden Arbeit sind aber noch Resultate der Beobachtungen von solchen Schwingungen angegeben, welche um die seitlichen Gleichgewichtslagen stattfanden. Diese Beobachtungen ermöglichten es, die Richtigkeit des Satzes: „die Asymmetrie der Schwingungen

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \frac{\omega - \gamma}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1} \vartheta^2$$

nimmt bei konstant bleibender Amplitude mit wachsendem Drillungswinkel zu," quantitativ nachzuweisen.

Eine Besprechung der für die Versuche notwendigen Vorbereitungen kann unterbleiben, da in diesem Punkte nach den Angaben von P. Schulze [1]) verfahren wurde.

II. Beschreibung der Methoden und Versuche.

a) Ursprüngliche Methode.

Anfangs wurde zum Nachweis einer messbaren Asymmetrie der Ablenkungen eine Methode benutzt, welche P. Schulze bei seinen Untersuchungen erfolgreich verwandte und welche darin besteht, dass in gleichem Schritt mit der Drehung des Magneten aus dem Meridian das Fernrohr bei ungeändertem Abstande vom Spiegel seitlich verschoben wird.

Hatte der Winkel γ_1 eine genügende Grösse, etwa von 20°—25°, so beruhigte man den Magnetstab mit Hilfe eines Gebläses.

Aus weiter unten angegebenen Gründen änderte nun der Verfasser der vorliegenden Arbeit für den weiteren Verlauf seiner Untersuchungen diese Methode zunächst in folgender Weise ab.

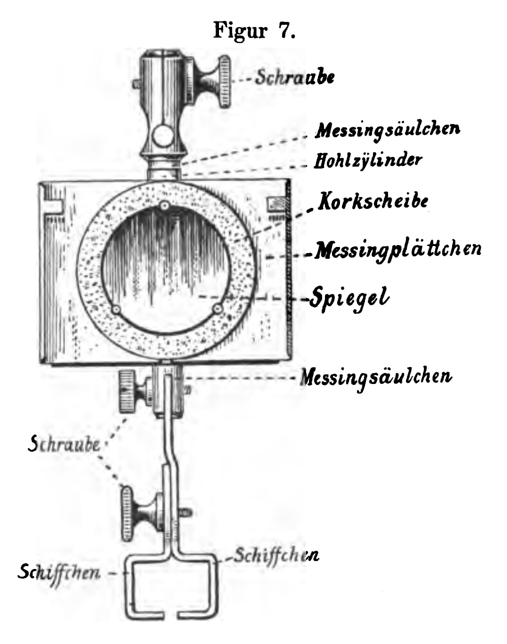
Das Fernrohr mit der Scala wurde nach der Drehung des Magneten wieder auf den ursprünglichen Platz gebracht.

---

1) P. Schulze, ib. p. 46; 30—31.

Alsdann verstellte man den am Schiffchen (cf. Fig. 7) drehbar

Figur 7.



angebrachten Spiegel so weit, dass das Fadenkreuz im Teilstrich 500 der Scala erschien und versetzte nun mit Hilfe desselben Gebläses den Magnetstab in Schwingungen.

Dass die Schwingungen asymmetrisch waren und dass die beobachtete Asymmetrie mit der nach der P. Schulze'schen Formel berechneten um so genauer übereinstimmte, je kleiner die Amplitude war, sei hier gleich erwähnt.

Zum Schluss las man am Torsionskopfe die Grösse der Drehung ab und führte den Magnetstab in den Meridian zurück, damit der Draht nicht zu lange tordiert blieb. —

In gleicher Weise verfuhr man bei der Bestimmung der Gleichgewichtslagen γ_2 und γ_3, sowie bei den bez. Schwingungsbeobachtungen. —

Nach der Theorie müssen die Ablenkungen asymmetrisch sein und zwar so, dass die dritte Gleichgewichtslage γ_3 mit

der zweiten γ_2 einen grösseren Winkel bildet, als diese mit der (kleinsten) ersten γ_1.

Dass dies der Fall war, zeigte sich, als die drei Ablenkungswinkel γ_1, γ_2, γ_3 aus den Einstellungen des Fadenkreuzes und dem Abstande des Spiegels von der Scala nach der bekannten Reduktionsformel berechnet waren und ihre Differenz gebildet wurde. —

Indessen stiess die Durchführung dieser an sich schon zeitraubenden Methode auf gewisse Schwierigkeiten.

Zunächst liess sich bei dem oben erwähnten seitlichen Verschieben nicht bewirken, dass das Fernrohr mit der Scala immer die gleiche Höhe beibehielt. Ferner zeigte sich, dass die Bilder der Scalenteile nicht ganz scharf waren.

Daher wurde bei den folgenden Versuchen gleich von vornherein, d. h. nicht erst bei der Beobachtung der Schwingungen, von der Drehbarkeit der Spiegelvorrichtung Gebrauch gemacht, so dass das Fernrohr während der Dauer des ganzen Versuches an seiner Stelle stehen bleiben konnte.

b) Definitive Methode.

In der Meridianlage des Magneten ward der Spiegel zunächst derart gestellt, dass das Fadenkreuz den mittelsten Teilstrich anzeigte. Darauf drehte man den Spiegel soweit zurück, dass ungefähr der Teilstrich Null erschien, beruhigte den Magnet mit Hilfe des Gebläses und notierte die Einstellung des Fadenkreuzes. Alsdann tordierte man, bis das Fadenkreuz sich am entgegengesetzten Ende der Scala einstellte, beruhigte den Magnet, notierte wieder die Einstellung und drehte den Spiegel zurück, bis eine der kleinsten Zahlen im Fadenkreuz sichtbar wurde. Nachdem der Magnet beruhigt war, notierte man die Einstellung und tordierte dann von neuem, bis das Fadenkreuz eine der grössesten Zahlen anzeigte u. s. w.

Bildete nun der Magnet einen hinreichend grossen Winkel γ_1 mit dem Meridian, so las man am Torsionskopfe die Grösse

der Drehung ab und drehte dann in der eingeschlagenen Richtung den Torsionskopf um den Winkel δ weiter, während man mit dem Spiegel in der angegebenen Weise verfuhr.

Nachdem die neue Gleichgewichtslage γ_2 erlangt war, drehte man den Torsionskopf noch ein Mal um einen Winkel von der Grösse δ weiter und führte darauf den Magnetstab wieder in den Meridian zurück.

Damit war der erste Teil des Versuches vollendet und es konnte nach Berechnung der drei Winkel $\gamma_{1,2,3}$ die Asymmetrie in dem verlangten Sinne festgestellt werden.

Es sei hier noch besonders betont, dass also nicht eine ganze Reihe von Ablenkungen vorgenommen wurden, wie das von P. Schulze geschehen ist, indem er bei seinen Untersuchungen über die Asymmetrie der Ablenkungen im Falle der magnetischen Wage δ verschiedene, gleiche und entgegengesetzte Werte erteilte.

Indes zeigte bei den vorliegenden Untersuchungen der Erfolg, dass die Bestimmung dreier Winkel genügte.

Bei der Ausführung der Schwingungsbeobachtungen verfuhr man in der oben unter *a*) angegebenen Weise.

III. Erster Versuch.

a) Berechnung der Ablenkungswinkel.

Die Entfernung des Spiegels von der Scala war:

$$\varrho = 1661 \text{ Scalenteile (mm).}$$

Nach zweimaliger Torsion wurde abgelesen

$$\omega_1 = 300^0,$$
$$= 5{,}23596.$$

Der zu ω_1 gehörige Winkel γ_1 berechnet sich folgendermassen:

Einstellung des Fadenkreuzes	Elongationen vom Mittelpunkte der Scala	Reduktion der Elongationen auf den Bogen
49,0	451,0	439,89
910,2	410,2	400,87
366,3	133,7	133,41
784,6	284,6	281,81

Die Summe der Bogen ist:

$$2\varrho\gamma_1 = 1255{,}98,$$
$$\gamma_1 = 0{,}378082,$$
$$= 21^0\,39'\,45{,}26''.$$

Nunmehr wurde am Torsionskopfe in der eingeschlagenen Richtung um 100^0 weiter gedreht, so dass

$$\omega_2 = 400^0$$
$$= 6{,}9813$$

ist.

Winkel γ_2 erhielt man dann durch folgende Rechnung:

Einstellung des Fadenkreuzes	Elongationen vom Mittelpunkte der Scala	Reduktion der Elongationen auf den Bogen
434,0	66,0	65,96
894,1	394,1	386,70

Die Addition der Bogen liefert 452,66, also ist

$$2\varrho\gamma_2 = 2\varrho\gamma_1 + 452{,}66 = 1708{,}64,$$
$$\gamma_2 = 0{,}514345,$$
$$= 29^0\,28'\,11{,}66''.$$

Nach der Wahl von ω_2 ist ω_3 bestimmt:

$$\omega_3 = 500^0,$$
$$= 8{,}7266.$$

Zur Erlangung des Winkels γ_3 brauchte nur ein Mal weiter als das vorige Mal tordiert zu werden:

Einstellung des Fadenkreuzes	Elongationen vom Mittelpunkte der Scala	Reduktion der Elongationen auf den Bogen
352,1	147,9	147,50
848,0	348,0	342,94

Addiert man die Bogen, so erhält man:

490,44,

dann ist

$$2\varrho\gamma_3 = 2\varrho\gamma_2 + 490{,}44 = 2199{,}08,$$
$$\gamma_3 = 0{,}661982,$$
$$= 37^0\,55'\,44{,}03''.$$

Bei der Reduktion der Elongationen auf den Bogen nach der Formel:

$$2\varrho\gamma = e\left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{\varrho^2} + \frac{1}{5}\frac{e^4}{\varrho^4} - \ldots\right)$$

konnte man sich auf das erste Korrektionsglied beschränken. Die Rechnungen wurden nach der abgekürzten Multiplikations- bez. Divisionsmethode ausgeführt.

Bildet man nun die Differenzen der Winkel, so ist

$$\gamma_3 - \gamma_2 = 8^0\,27'\,32{,}37''$$

und

$$\gamma_2 - \gamma_1 = 7^0\,48'\,26{,}40''.$$

Damit ist die Asymmetrie der Ablenkungen in dem verlangten Sinne erhalten. —

b) Vergleich der beobachteten mit der nach der Theorie berechneten Asymmetrie der Ablenkungen.

Die Formel (6)

$$E = \frac{\omega - \gamma}{[(\omega - \gamma)\ \mathrm{cotg}\ \gamma + 1]^3}\,\delta^2$$

giebt die Möglichkeit, nach Einsetzung der Werte für δ, ω und γ die beobachtete Asymmetrie der Ablenkungen zu kontrollieren.

Es ist

$$\delta = 100^0$$
$$= 1{,}7453,$$
$$\omega - \gamma = \omega_2 - \gamma_2 = 6{,}466955,$$
$$\mathrm{cotg}\ \gamma = \mathrm{cotg}\ \gamma_2 = 1{,}7702166.$$

Dann ergiebt sich

$$E = 0{,}0102128$$
$$= 35'\,6{,}66''.$$

Die beobachtete Asymmetrie ist

$$E = (\gamma_3 - \gamma_2) - (\gamma_2 - \gamma_1) = 0{,}011374$$
$$= 39' 5{,}97''.$$

c) Berechnung von $\nu : \mu^2$.

Die Berechnung von $\nu : \mu^2$ gestaltet sich recht einfach, da, wie schon oben (v. p. 22) bemerkt wurde, nur zwei Ablenkungen vorgenommen worden sind.

Man hat also aus der Gleichung (5b) die Gleichungen:

$$\beta_1 = \mu\delta + \nu\delta^2$$
$$\beta_2 = -\mu\delta + \nu\delta^2$$

zu bilden. Ermittelt man aus diesen Gleichungen μ und ν, so ist

$$\mu = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2\,\delta},$$

und

$$\nu = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\,\delta^2},$$

folglich ist

$$\frac{\nu}{\mu^2} = 2\,\frac{\beta_1 + \beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)^2},$$

worin für β_1 und β_2 die auf dem Wege der Beobachtung gefundenen Werte einzusetzen sind:

$$\beta_1 = 0{,}147637 \text{ und } \beta_2 = -0{,}136263.$$

Dann erhält man

$$\frac{\nu}{\mu^2} = 2\,\frac{0{,}011374}{0{,}2839^2} = 0{,}2822$$

und

$$\frac{2}{3}\left[\frac{\nu}{\mu^2}\right] = 0{,}18813.$$

Dieser Wert findet sich in der Columne XV der Tabelle I.

d) Schwingungsbeobachtungen und Berechnung der Asymmetrie ε.

Es ist vorauszuschicken, dass in allen den Fällen, wo sich der Nullpunkt änderte, bei der Berechnung der Elongationen interpoliert wurde.

Von den drei Tabellen ist im folgenden nur diejenige mitgeteilt worden, welche sich auf die mittlere Gleichgewichtslage γ_2 bezieht. Über den Zweck, welchen die beiden anderen Tabellen verfolgen, ist oben (v. p. 19) berichtet. Sie sind im Auszuge in der Diskussion enthalten, da von ihnen nur die Resultate von Belang sind.

Es erübrigt sich noch zu bemerken, dass die Columnen I—XIII die gleiche Bedeutung wie in der Dissertation von P. Schulze haben; die Columne XIV enthält die nach der Gleichung (11) berechnete Asymmetrie der Schwingungen.

e) Diskussion der Beobachtungen.

Im folgenden sind zunächst die in der Tabelle I niedergelegten Resultate einer Besprechung zu unterziehen.

Man erkennt durch Vergleich der in Columne XIII und XIV befindlichen Werte von ε, dass die beobachteten sich von den berechneten mehr oder minder unterscheiden und zwar durchweg kleiner sind als diese.

In der graphischen Darstellung kommt diese Tatsache bei der von P. Schulze getroffenen Wahl des Koordinatensystems in entsprechender Weise zum Ausdruck (v. Fig. 8).

Diese Abweichung erklärt sich nun ungezwungen durch folgende Überlegung.

Wir sahen schon oben (v. p. 24), dass die berechnete Asymmetrie der Ablenkungen (E) kleiner als die beobachtete ist.

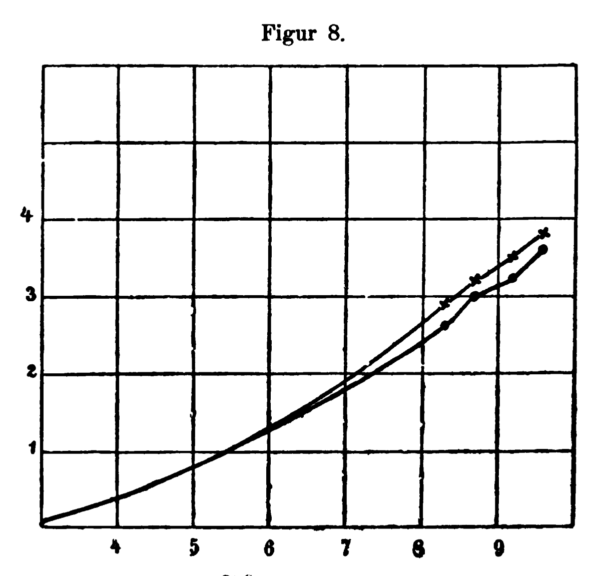
Da ferner die beobachteten ε (Mass für die Asymmetrie der Schwingungen) mit den nach der Formel von P. Schulze berechneten — wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist —

ϑ	$\varepsilon = \|\vartheta\| - \|\alpha\|$	$\varepsilon = \frac{1}{3} \frac{(\omega_2 - \gamma_2)\,\vartheta^2}{(\omega_2 - \gamma_2) \operatorname{cotg} \gamma_2 + 1}$
0,14369	0,00363	0,00357
0,13771	0,00324	0,00328
0,13184	0,00301	0,00301
0,12524	0,00268	0,00272

I. Umkehrpunkte auf der Scala auf der einen Seite
15,0
17,1
19,9
22,1
24,2
27,1

annähernd übereinstimmen, so kann man Fehler bei der Beobachtung der Ablenkungen als Grund für die oben vermerkte Abweichung der ε ansehen. —

Figur 8.



Die Abscissen betragen das $\frac{200}{3}$ fache von ϑ, die Ordinaten das 1000 fache von ε

. . . . beobachtete } Punkte.
× × × × berechnete }

Es sind nun ferner in Verbinduug mit der obigen Tabelle die Resultate derjenigen Beobachtungsreihen, welche sich auf die Schwingungen um die seitlichen Ablenkungslagen beziehen, zu betrachten. Sie liefern eine quantitative Bestätigung des oben erwähnten (p. 19) Satzes aus der Theorie der Asymmetrie der Schwingungen: „Die Asymmetrie der Schwingungen nimmt bei konstant bleibender Amplitude mit wachsendem Drillungswinkel zu."

I. und III. Tabelle.

$\omega - \gamma$	ϑ	$\varepsilon = \lvert\vartheta\rvert - \lvert\alpha\rvert$	$\varepsilon = \frac{1}{3} \frac{(\omega-\gamma)\ \vartheta^2}{(\omega-\gamma)\cot g\ \gamma + 1}$
$\omega_2 - \gamma_2 = 6{,}466955$	0,14369	0,00363	0,00357
$\omega_3 - \gamma_3 = 8{,}064618$	0,14375	0,00542	0,00489
$\omega_2 - \gamma_2 = 6{,}466955$	0,13771	0,00324	0,00328
$\omega_3 - \gamma_3 = 8{,}064618$	0,13476	0,00484	0,00430

II. und III. Tabelle.

$\omega - \gamma$	ϑ	$\varepsilon = \lvert\vartheta\rvert - \lvert\alpha\rvert$	$\varepsilon = \frac{1}{3} \frac{(\omega-\gamma)\ \vartheta^2}{(\omega-\gamma)\cot g\ \gamma + 1}$
$\omega_1 - \gamma_1 = 4{,}857878$	0,10128	0,00167	0,00125
$\omega_3 - \gamma_3 = 8{,}064618$	0,10068	0,00216	0,00240
$\omega_1 - \gamma_1 = 4{,}857878$	0,09254	0,00138	0,00105
$\omega_3 - \gamma_3 = 8{,}064618$	0,08516	0,00143	0,00171

Vorstehende Zahlen beweisen zur Genüge die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes. Bedenken könnte man vielleicht gegen die erste Zusammenstellung haben, da das zu dem grösseren $\omega_3 - \gamma_3$ gehörige ϑ grösser als das zu $\omega_2 - \gamma_2$ gehörige ϑ ist. Allein der Unterschied beider Werte ist sehr klein und die zu $\omega_3 - \gamma_3$ gehörigen beiden Werte von ε überwiegen zu sehr die zu $\omega_2 - \gamma_2$ gehörigen, als dass jener Unterschied die wirkende Ursache wäre. In allen übrigen Zusammenstellungen sind die zu den grösseren $\omega - \gamma$ gehörigen ϑ kleiner als die mit ihnen verglichenen. —

Bei einem zweiten Versuche berücksichtigte man gelegentlich der Beobachtung der Schwingungen gleich von vornherein nur kleine Amplituden. Ferner, da man erkannt hatte, dass die Asymmetrie der Ablenkungen mit wachsendem Torsionswinkel zunimmt, so gab man jetzt ω_1 einen grösseren Wert, liess aber δ unverändert. —

IV. Zweiter Versuch.

a) Berechnung der Ablenkungswinkel.

Die Entfernung des Spiegels von der Scala betrug:

$$\varrho = 1665 \text{ Scalenteile (mm.)}$$

Die Differenz der Ablesungen am Torsionskopfe zu Beginn und am Schlusse der ganzen Drehung betrug:

$$\omega_1 = 550^0,$$
$$= 9{,}5993.$$

Da dreimal hintereinander tordiert wurde, so setzt sich der Winkel γ_1 aus sechs kleineren Winkeln zusammen:

Einstellung des Fadenkreuzes	Elongationen vom Mittelpunkte der Scala	Reduktion der Elongationen auf den Bogen
10,1	489,9	475,75
847,8	347,8	342,74
5,8	494,2	479,68
899,4	399,4	391,68
45,6	454,4	443,20
797,1	297,1	293,95

Die Summe dieser Bogen ist:

$$2\varrho\,\gamma_1 = 2427{,}00,$$
$$\gamma_1 = 0{,}72883,$$
$$= 41^0 45' 32''$$

Indem man am Torsionskopfe in der eingeschlagenen Richtung um 100^0 weiter drehte, so dass

$$\omega_2 = 650^0,$$
$$= 11{,}3446$$

ist, erhielt man den Winkel γ_2.

Einstellung des Fadenkreuzes	Elongation vom Mittelpunkte der Scala	Reduktion der Elongationen auf den Bogen
117,3	382,7	375,96
698,5	198,5	197,56

Die Addition der Bogen liefert 573,52, also ist

$$2\varrho\gamma_2 = 2\varrho\gamma_1 + 573{,}52 = 3000{,}52,$$
$$\gamma_2 = 0{,}901057,$$
$$= 51^\circ 37' 37''.$$

Nun ist

$$\omega_3 = 750^\circ,$$
$$= 13{,}0899.$$

Der Winkel γ_3 setzt sich aus γ_2 und zwei kleineren Winkeln zusammen:

Einstellung des Fadenkreuzes	Elongation vom Mittelpunkte der Skala	Reduktion der Elongationen auf den Bogen
135,6	364,4	358,58
864,9	364,9	359,06

Addiert man die Bogen, so erhält man

$$717{,}64,$$

dann ist

$$2\varrho\gamma_3 = 2\varrho\gamma_2 + 717{,}64 = 3718{,}16,$$
$$\gamma_3 = 1{,}11656$$
$$= 63^\circ 58' 27{,}5''.$$

Bildet man die Differenzen der Winkel, so ist

$$\gamma_3 - \gamma_2 = 12^\circ 20' 50''$$
$$\text{und } \gamma_2 - \gamma_1 = 9^\circ 52' 5'' \quad ,$$

womit die Asymmetrie der Ablenkungen in dem verlangten Sinne nachgewiesen ist.

b) Vergleich der beobachteten mit der nach der Theorie berechneten Asymmetrie der Ablenkungen.

Setzt man in die Formel (6) $E = \frac{\omega - \gamma}{[(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1]^3} \delta^2$

$$\omega - \gamma = \omega_2 - \gamma_2 = 10{,}443543,$$
$$\operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg} \gamma_2 = 0{,}7919166,$$
$$\delta = 1{,}7453$$

ein, so ergiebt sich

$$E = 0{,}0399278$$
$$= 2^0\,17'\,15{,}66'',$$

während beobachtet wurde:

$$E = (\gamma_3 - \gamma_2) - (\gamma_2 - \gamma_1) = 0{,}043276$$
$$= 2^0\,28'\,45''.$$

c) Berechnung von $\nu:\mu^2$.

Setzt man in die unter B, III, c (v. p. 25) angegebene Formel:

$$\frac{\nu}{\mu^2} = 2\,\frac{\beta_1 + \beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}$$

für β_1 bez. β_2 im Bogenmass 0,215503 bez. — 0,172227 ein, so erhält man:

$$\frac{\nu}{\mu^2} = 2\,\frac{0{,}043276}{0{,}38773^2} = 0{,}57575$$

und
$$\frac{2}{3}\left[\frac{\nu}{\mu^2}\right] = 0{,}38383.$$

Dieser Wert findet sich in der Columne XV der Tabelle I.

d) Schwingungsbeobachtungen und Berechnung der Asymmetrie ε.

Von den Tabellen ist im folgenden diejenige, welche sich auf die mittlere Gleichgewichtslage bezieht, mitgeteilt worden. Eine zweite, über deren Zweck p. 19 berichtet ist, findet sich im Auszuge in der Diskussion.

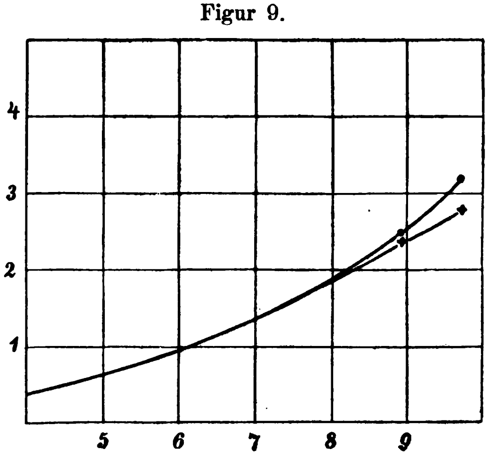
e) Diskussion der Beobachtungen.

Dieser Versuch, welcher bei der gleichen Anordnung wie der vorige ausgeführt wurde, zeigt in deutlicher Weise, dass die Abweichung zwischen beobachteter und berechneter Asymmetrie der Ablenkungen, dadurch, dass bei der Beobachtung

der Schwingungen nur kleine Amplituden berücksichtigt wurden, in den Endresultaten verringert wird.

Denn die Abweichung der beobachteten von der berechneten Asymmetrie der Ablenkungen ist dieses Mal bedeutender — bei dem vorigen Versuche betrug sie nur wenige Minuten, dennoch zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung in den beiden ε, wie sich auch aus der graphischen Darstellung zu erkennen giebt. (Fig. 9).

Figur 9.



Die Abscissen betragen das 250 fache von ϑ, die Ordinaten das 5000 fache von ε.

• • beobachtete } Punkte.
× × berechnete } Punkte.

Zur quantitativen Bestätigung des erwähnten Satzes aus der Theorie der Asymmetrie der Schwingungen liefern die Resultate der Tabelle II in Verbindung mit denen der Tabelle I nur einen spärlichen Beitrag:

$\omega - \gamma$	ϑ	$\varepsilon = \lvert\vartheta\rvert - \lvert\alpha\rvert$	$\varepsilon = \frac{1}{3} \frac{(\omega - \gamma)\, \vartheta^2}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg} \gamma + 1}$
$\omega_1 - \gamma_1 = 8{,}87047$	0,03942	0,00055	0,00042
$\omega_2 = \gamma_2 = 10{,}443543$	0,03881	0,00065	0,00056

C. Berechnung der Nullpunktskorrektion bei asymmetrischen Schwingungen aus der Asymmetrie der Ablenkungen.

Schon P. Schulze[1]) hat in einem besonderen Abschnitt „Berechnung der Ruhelage aus Umkehrpunkten bei asymmetrischen Schwingungen" die Berechnung der Nullpunktskorrektion behandelt. Er giebt nicht bloss an, wie diese Rechnung in den beiden von ihm untersuchten Fällen des magnetischen Horizontalintensitätsvariometers und der magnetischen Wage auszuführen ist, sondern er erläutert sie auch durch einige Beispiele, die ihm seine Beobachtungen der asymmetrischen Schwingungen der magnetischen Wage lieferten.

Es handelt sich hier also lediglich um einen Nachtrag, in welchem der Berechnung der Nullpunktskorrektion der aus der Asymmetrie der Ablenkungen erhaltene Wert von $2\nu : 3\mu^2$ zu Grunde liegt.

Wir können uns demnach kurz so fassen.

Die Korrektion, welche an dem aus mehreren aufeinander folgenden Umkehrpunkten gebildeten Mittelwerte anzubringen ist, beträgt $2\varrho \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ und zwar ist dieselbe von jenem Mittelwerte abzuziehen, da der grössere Ausschlag nach den grösseren Zahlen hin erfolgte.

---

1) P. Schulze, l. c. p. 91 ff.

Zur Berechnung von $2\varrho\,\varepsilon$ dient also die Formel (11):

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\left[\frac{\nu}{\mu^2}\right]\vartheta^2 \quad \text{oder} \quad 2\varrho\varepsilon = \frac{2}{3}\left[\frac{\nu}{\mu^2}\right]\frac{(2\varrho\vartheta)^2}{2\varrho}.$$

Für $2\varrho\,\vartheta$ setzt man $\frac{|2\varrho\vartheta| + |2\varrho\alpha|}{2}$ d. i. den direkt beobachteten halben Schwingungsbogen.

Die Anwendung des Gesagten zu zeigen, entnehmen wir e ein Beispiel dem ersten und zweiten Versuche.

Aus der beobachteten Asymmetrie der Ablenkungen war berechnet:

$$\frac{2}{3}\,\frac{\nu}{\mu^2} = 0{,}18813,$$

während

$$\varrho = 1661$$

gemessen ward.

Die folgenden Umkehrpunkte sind der dritten Gruppe der Schwingungsbeobachtungen entlehnt.

Umkehrpunkte		Mittelwert (Pseudonullpunkt)	$2\varrho\,\vartheta$	$2\varrho\varepsilon$	Wahrer Nullpunkt
62,2					
	947,1				
65,0		505,24	440,31	10,97	499,75
	944,0				
67,6					

Benutzt man zur Berechnung der Korrektion den Wert aus der Gleichung (8):

$$\frac{2}{3}\,\frac{\nu}{\mu^2} = 0{,}17317,$$

so ist

$$2\varrho\varepsilon = 10{,}10$$

und der wahre Nullpunkt

500,20.

Es wurde aber vor Beginn der Beobachtung der vierten Gruppe von Umkehrpunkten bei der Neubestimmung des Nullpunktes beobachtet:

499,7.

Bei dem zweiten Versuche wurde für $2\nu : 3\mu^2$ der Wert 0,38383 ermittelt, während gemessen ward:

$$\varrho = 1665.$$

Die folgenden Umkehrpunkte finden sich am Schlusse der ersten Gruppe.

Umkehrpunkte		Mittelwert (Pseudonullpunkt)	$2\varrho\vartheta$	$2\varrho\varepsilon$	Wahrer Nullpunkt
373,0					
	628,9				
373,8		501,05	127,29	1,86	**500,12**
	627,8				
374,5					

Benutzt man wieder zur Berechnung der Korrektion den Wert aus der Gleichung (8): $2\nu : 3\mu^2 = 0,37551$, so ist

$$2\varrho\varepsilon = 1,82$$

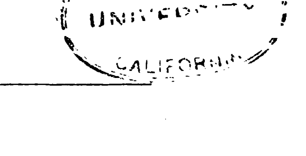
und der wahre Nullpunkt:

500,14.

Es wurde vor Beginn der Beobachtung der folgenden Gruppe von Umkehrpunkten als Nullpunkt neu bestimmt:

500,0.

Diese Beispiele mögen genügen. —



Lebenslauf.

Ich, Robert v. Förster, Sohn eines Architekten †, geboren den 22. Juni 1877 zu Münster in Westfalen, lutherischer Konfession, genoss meine erste Schulbildung in der Rektoratschule meiner Vaterstadt. Später besuchte ich daselbst das Paulinische Gymnasium, welches ich Februar 1898 nach bestandener Reifeprüfung verliess. Ich studierte zunächst an der Universität Münster drei Semester Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften. Vom 11. November 1899 bis zum 8. August 1902 war ich dann bei der Marburger Universität immatrikuliert. Am 20. Mai 1904 bestand ich vor der Kgl. Wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission zu Marburg die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen und am 3. August d. gl. J. das Examen rigorosum. Meiner Dienstpflicht zu genügen trat ich am 1. Oktober 1904 in das Kurhessische Jäger-Bataillon ein, aus welchem ich am 30. April 1905 entlassen wurde.

Meine akademischen Lehrer waren:

In Münster:

Brefeld, Busz, Kappes, E. Ketteler †, Killing, H. Landois †, v. Lilienthal, Spicker und Zopf.

In Marburg:

A. Brauer, Cohen, v. Dalwigk, Feussner, Hensel, E. Hess †, Kayser, Kohl, Korschelt, Kühnemann, A. Meyer, Natorp, Oldenberg, Richarz, Schaum, Schottky, Ule und Zincke.

Meinen verehrten Lehrern spreche ich meinen besten Dank aus.

